

**İKİNCİ TƏRTİB TƏNLİKLƏR ÜÇÜN QEYRİ-LOKAL
SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİ DAXİLİNDƏ
LAYIN YARANMASININ ARAŞDIRILMASI**

N.Ə.ƏLİYEV, S.ƏSRƏFİ
Bakı Dövlət Universiteti
siamak_ashrafi_b@yahoo.com

İşdə ikinci tərtib adi xətti həyəcanlanmış diferensial tənlik üçün qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində qoyulmuş sərhəd məsələsi üçün layın yaranıb yaranmaması hadisəsi araşdırılmışdır. Belə ki, verilmiş tənlik üçün alınan zəruri şərtlərin köməyi ilə sərhəd şərtləri lokallaşdırılır. Alınan lokal şərtlərdən hansı həllin limit vəziyyəti üçün ödənilmirsə, onda həmin şərtin ödənilmədiyi sərhəddə lay yaranır.

GİRİŞ

Məlumdur ki, sərhəd zolağı hadisəsinin riyazi modeli yüksək tərtib törəmənin əmsali kiçik parametr saxlayan diferensial tənliklər üçün məsələlərə gətirilir. Aydındır ki, kiçik parametr sifira gedərsə, onda tənliyin tərtibi azaldığından, alınan tənliyin həlli bütün verilən şərtləri ödəməyə də bilər. Bu zaman lokal şərtin ödənilmədiyi nöqtədə lay yaranır.

Sonralar göstərilmişdir ki, bir çox başqa proseslər, məsələn, maddi nöqtənin hərəkəti zamanı sıçrayışlı hərəkətlər də belə məsələlərə gətirilir.

Təqdim olunan bu işdə ikinci tərtib diferensial tənlik üçün qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində qoyulmuş bir sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Burada əvvəlcə verilmiş tənliyə qoşma tənlik qurulur, sonra isə bu qoşma tənlik üçün fundamental həll tapılır. Bu fundamental həllin köməyi ilə verilmiş tənliyin ixtiyari həllinin ödədiyi zəruri şərt təyin edilir və həmin zəruri şərtin köməyi ilə verilmiş məsələnin sərhəd şərtləri lokallaşdırılır.

Qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində həyəcanlanma məsələsinin açıq qaldığı [1] – də göstərilmişdir.

Qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində layın yaranıb yaranmamasının təyini çətinlik doğurmadiği məlumdur. Belə ki, verilmiş məsələnin həllinin limit vəziyyəti məsələnin şərtlərindən heç olmazsa birini ödəmirsə, onda sərhəd zolağı yaranır. Bu sərhəd zolağının hansı sərhəddə yaranmasının təyini çətinlik təşkil edir.

Bununla əlaqədar olaraq aşağıdakı məsələyə baxacağıq:

$$\varepsilon y_\varepsilon(x) \equiv \varepsilon y_\varepsilon''(x) - y_\varepsilon'(x) + \alpha y_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(0) + \alpha y_\varepsilon(1) &= 0, \\ y_\varepsilon'(0) + \beta y_\varepsilon'(1) &= 8. \end{aligned} \quad (2)$$

Əvvəlcə bu məsələni adi qayda ilə həll edək. Tənliyin ümumi həlli

$$y_\varepsilon(x) = C_1 e^{\theta_1(\varepsilon)x} + C_2 e^{\theta_2(\varepsilon)x}, \quad (3)$$

şəklindədir, burada C_1 və C_2 ixtiyari sabitlər, $\theta_k(\varepsilon)$ isə

$$\varepsilon\theta^2 - \theta + a = 0,$$

xarakteristik tənliyinin

$$\theta_k(\varepsilon) = \frac{1 + (-1)^k \sqrt{1 - 4a\varepsilon}}{2\varepsilon}, \quad (k = 1, 2), \quad (4)$$

şəklində verilən kökləridir. Sərhəd şərtindən istifadə etmək üçün (3)-ü diferensiallayıb (2) -də yazsaq:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + \alpha [C_1 e^{\theta_1(\varepsilon)} + C_2 e^{\theta_2(\varepsilon)}] &= 0, \\ C_1 \theta_1(\varepsilon) + C_2 \theta_2(\varepsilon) + \beta [C_1 \theta_1(\varepsilon) e^{\theta_1(\varepsilon)} + C_2 \theta_2(\varepsilon) e^{\theta_2(\varepsilon)}] &= \gamma. \end{aligned}$$

Buradan təyin edilən C_k sabitlərini (3)-də yazsaq, (1),(2) məsələsinin həlli üçün

$$y_\varepsilon(x) = -\gamma \frac{1 + \alpha e^{\theta_2(\varepsilon)}}{\Delta(\varepsilon)} e^{\theta_1(\varepsilon)x} + \gamma \frac{1 + \alpha e^{\theta_1(\varepsilon)}}{\Delta(\varepsilon)} e^{\theta_2(\varepsilon)x}, \quad (5)$$

ifadəsi alınmış olur, belə ki,

$$\Delta(\varepsilon) = \begin{vmatrix} 1 + \alpha e^{\theta_1(\varepsilon)} & 1 + \alpha e^{\theta_2(\varepsilon)} \\ \theta_1(\varepsilon)[1 + \beta e^{\theta_1(\varepsilon)}] & \theta_2(\varepsilon)[1 + \beta e^{\theta_2(\varepsilon)}] \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

Məsələnin həlli üçün alınan (5) ifadəsində $\varepsilon \rightarrow 0$ olmaqla limitə keçmək üçün əvvəlcə xarakteristik tənliyin (4) köklərinin $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda ifadələrini təyin edək:

$$\begin{aligned} \theta_1(0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4a\varepsilon}}{2\varepsilon} = a, \\ \theta_2(0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4a\varepsilon}}{2\varepsilon} = \infty, \end{aligned}$$

olduqlarından, (5) -dən

$$y_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon(x) = 0, \quad (7)$$

alırıq.

Alınan (7) funksiyası (2) sərhəd şərtlərindən birincisini ödəyib, ikincisini ödəmədiyindən (1),(2) sərhəd məsələsi üçün lay yaranmış olur. Layın hansı sərhəddə yarandığı məlum deyil. Asanlıqla görmək olar ki, (1) tənliyinə qoşma olan tənlik

$$\ell_\varepsilon^* Z_\varepsilon(x) \equiv \varepsilon Z_\varepsilon''(x) + Z_\varepsilon'(x) + aZ_\varepsilon(x) = g(x),$$

şəklindədir [2], belə ki, $g(x)$ ixtiyari kəsilməz funksiyadır. Bu qoşma tənliyin fundamental həlli isə [2]

$$Z_\varepsilon(x - \xi) = \theta(x - \xi) \frac{e^{\chi_2(\varepsilon)(x-\xi)} - e^{\chi_1(\varepsilon)(x-\xi)}}{\sqrt{1-4a\varepsilon}}, \quad (8)$$

kimidir, burada $\theta(t)$ Xevisaydın vahid funksiyası, $\chi_k(\varepsilon)$ isə

$$\varepsilon\chi^2 + \chi + a = 0,$$

xarakteristik tənliyin

$$\chi_k(\varepsilon) = \frac{-1 + (-1)^k \sqrt{1-4a\varepsilon}}{2\varepsilon}, \quad (k=1, 2), \quad (9)$$

şəklində olan kökləridir.

Asanlıqla görmək olar ki,

$$\begin{cases} \chi_1(0) = -\infty, \\ \chi_2(0) = -a. \end{cases} \quad (10)$$

Yuxarıda aldığımız (8) fundamental həllini və onun törəməsini (1) tənliyinin hər iki tərəfinə skalyar vurub, hissə-hissə inteqrallamadan istifadə etməklə [3], [4]-ə analoji olaraq aşağıdakı zəruri şərtləri almış oluruq:

$$y_\varepsilon(0) = -\frac{e^{\chi_2(\varepsilon)} - e^{\chi_1(\varepsilon)}}{\sqrt{1-4a\varepsilon}} \varepsilon y_\varepsilon'(1) + \frac{[\varepsilon \chi_2(\varepsilon) + 1]e^{\chi_2(\varepsilon)} - [\varepsilon \chi_1(\varepsilon) + 1]e^{\chi_1(\varepsilon)}}{\sqrt{1-4a\varepsilon}} y_\varepsilon(1), \quad (11)$$

$$y_\varepsilon'(0) = \varepsilon y_\varepsilon'(1) \frac{\chi_2(\varepsilon)e^{\chi_2(\varepsilon)} - \chi_1(\varepsilon)e^{\chi_1(\varepsilon)}}{\sqrt{1-4a\varepsilon}} + a y_\varepsilon(1) \frac{e^{\chi_2(\varepsilon)} - e^{\chi_1(\varepsilon)}}{\sqrt{1-4a\varepsilon}}. \quad (12)$$

Aldığımız (11), (12) zəruri və verilmiş (2) sərhəd şərtlərində limitə keçsək, alınan xətti cəbri tənliklər sistemində (tənliklərin sayı 4-dür)

$$y_0(0) = y_0(1) = y_0'(0) = 0, \quad y_0'(1) = \frac{\gamma}{\beta}, \quad (13)$$

olduğunu alarıq.

Yuxarıda aldığımız (7) funksiyası (13) şərtlərindən axırıncısını ödəmədiyindən, $x = 1$ nöqtəsində lay yaranır.

Teorem. Verilmiş qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində (1), (2) məsələsi üçün a, α, β və γ sıfırdan fərqli sabitlədirsə, onda $x = 1$ nöqtəsində lay yaranır.

ƏDƏBİYYAT

1. Duolan E.P., Miller J.J.H., Schilders L.H.A. Uniform Numerical Methods for Problems with initial boundary layers, Boole Press Dublin, 1980, p. 198.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы, М.: Наука, 1969, 526 с.
3. Bahrami F., Aliev N., Hosseini S.M. A method for the reduction of four dimensional mixed problems with general boundary conditions to a system of second kind Fredholm integral equations, Italian Journal of pure and applied mathematics, 2005, №17, p. 91-104.
4. Aliev N., Jahanshahi M. Solution of Poissons equation with global, local and non-local boundary conditions, Int.Journal.Math.Educ.Sci.Technol., 2002, v.33, №2, p. 241-247.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Н.А.АЛИЕВ, С.АШРАФИ

РЕЗЮМЕ

В данной работе исследован вопрос возникновения граничного слоя для обыкновенного линейного возмущенного дифференциального уравнения второго порядка при нелокальном граничном условии. С помощью необходимых условий, полученных для данного уравнения, локализуется граничные условия. Если не выполняется одно из полученных локальных условий для предельного состояния решения, то на границе, где не выполняется это же самое условие, возникает пограничный слой.

INVESTIGATION OF APPEARANCE OF A LAYER FOR THE SECOND ORDER EQUATION WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS

N.A.ALIYEV, S.ASHRAFI

SUMMARY

The paper investigates the problem of appearance of a boundary layer in perturbed ordinary second order linear differential equation with non-local boundary conditions. Thus, the boundary conditions are localised by use of the necessary conditions obtained for the considered equation. If any of the obtained local conditions doesn't satisfy the limit solution, then a layer appears in the boundary where this condition is un fulfilled.